



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

RELATIVIDADE ESPECIAL

Andrea Latgé

Sala A3-04 IF



	Seg.	Ter.	Qua.	Qui	Sex	Sab.
Março	9	10	11	12	13	
	16	17	18	19	20	
	23	24	MT1 25	26	27	
	30	31	1	2	Feriado 3	
Abril	6	7	8	9	10	
	MT2 13	14	15	16	17	
	Recesso 20	21	22	23	24	P1 25
	27	28	MT3 29	30	Feriado 1	
Maio	4	5	6	7	8	
	11	12	MT4 13	14	15	
	18	19	20	21	22	
	25	26	MT5 27	28	29	P2 30
Junho	1	2	3	4	5	
	MT6 8	9	10	11	12	
	15	16	MT7 17	18	19	
	22	23	24	25	26	
Julho	29	30	MT8 1	2	3	P3 4
	6	7	8	9	10	VR 11
	13	14	15	16	17	VS 18
	20	21	22	23		

P1: 25/Abr 14:15~16:15
P2: 30/Mai 14:15~16:15
P3: 04/Julho 14:15~16:15
VR: 11/Julho 14:15~16:15
VS: 18/Juho 14:15~16:15

Período Letivo:
09/março de 2014: início
18/julho de 2014: Fim

Tópicos

P1

Relatividade

O fim da física clássica

Quantização

Revisão

P2

Funções de onda e incerteza

Mecânica Quântica Unidimensional

Física atômica

Revisão

P3

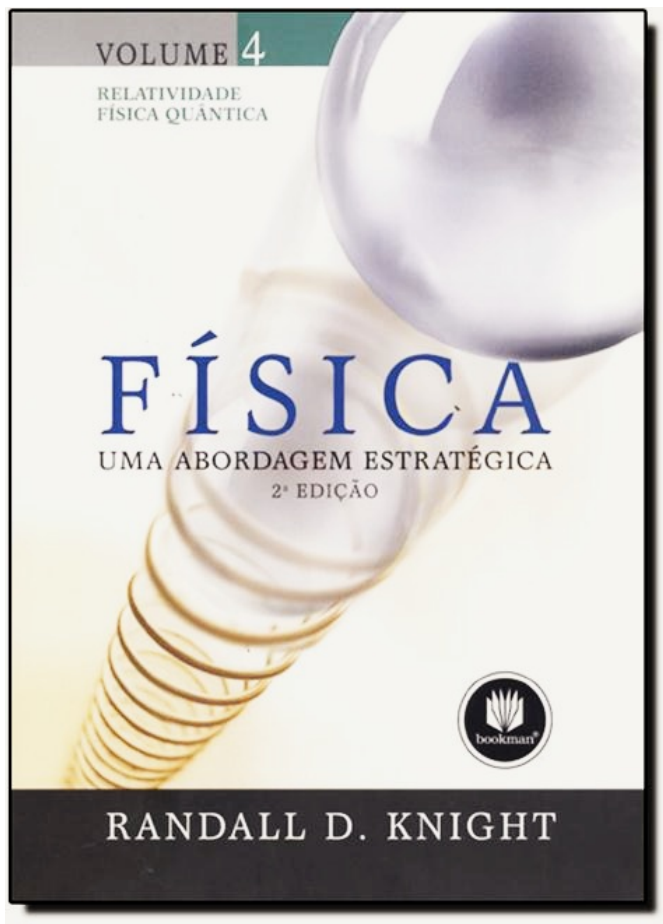
Física nuclear

Energia nuclear (Halliday)

Condução elétrica nos sólidos (Halliday)

Revisão



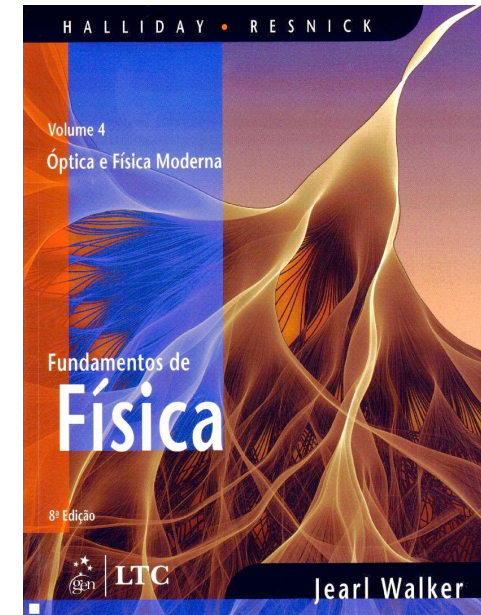


Livro-texto principal:

“Física, uma abordagem estratégica” Vol 4

Randall L. Knight
Caps. 37 – 43

**Livro-texto
secundário**



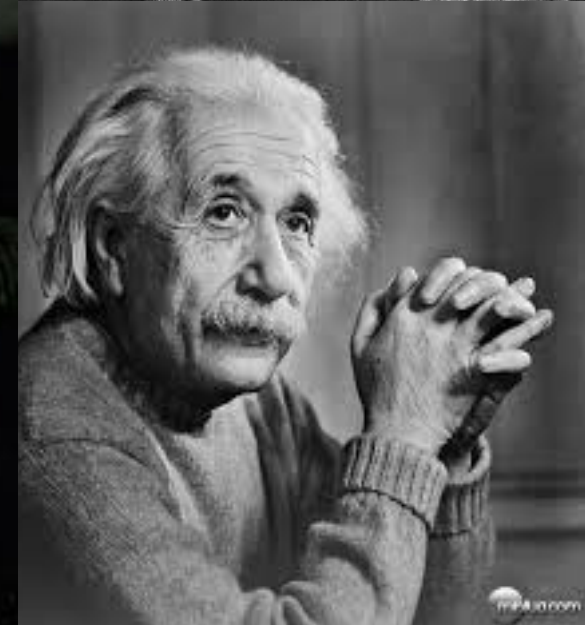
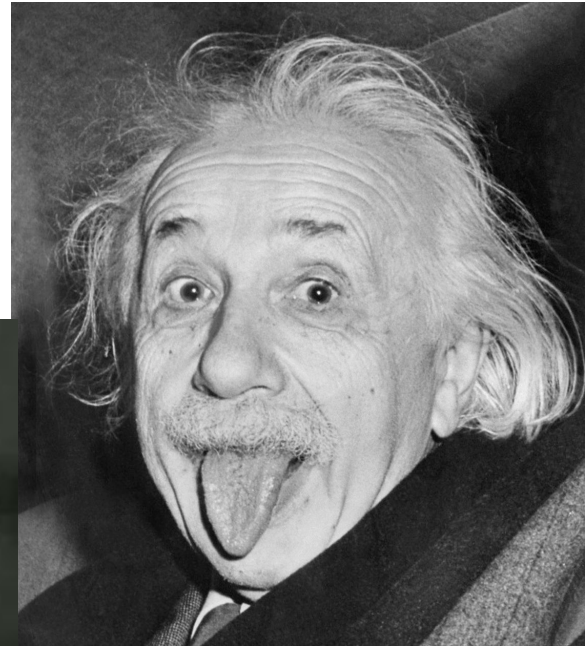
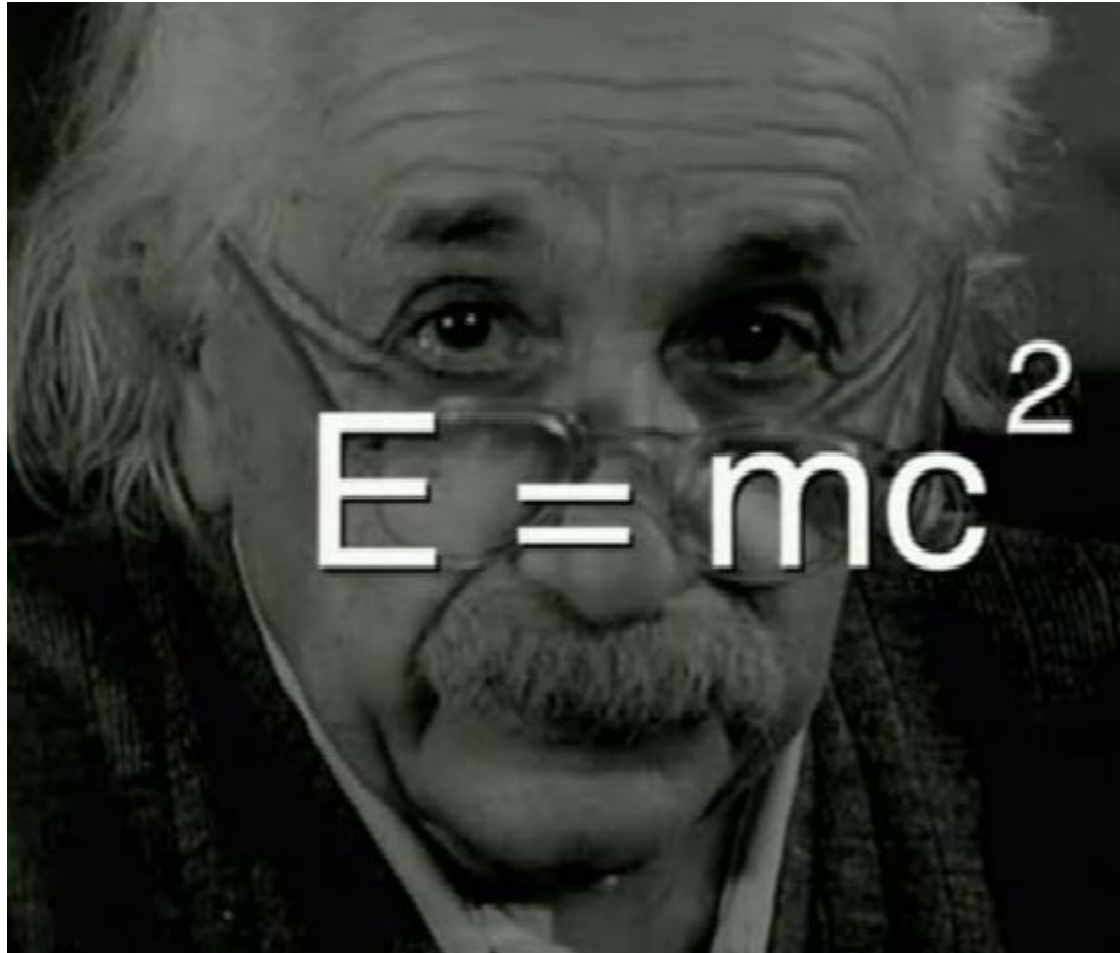
Parte do conteúdo da P3

**“Fundamentos de Física, vol. 4”, 8ª ed.
Halliday, Resnick e Walker
capítulos 41 e 43**



RELATIVIDADE

Albert Einstein 1879 -1955

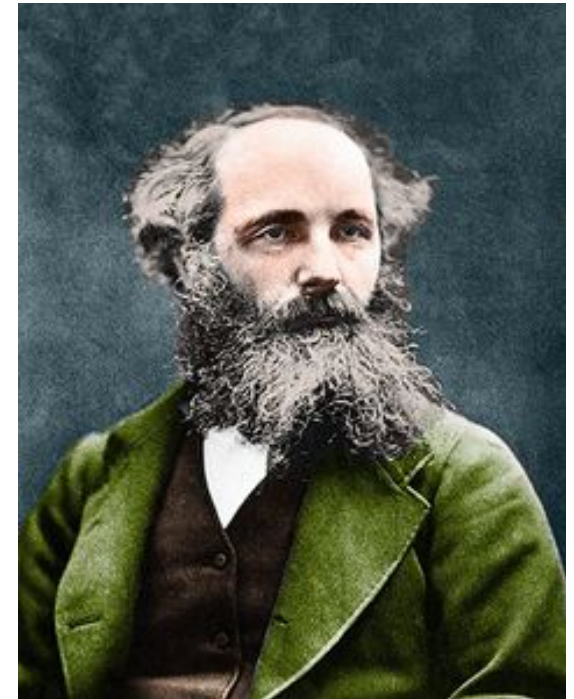




Galileu Galilei
1564/1642



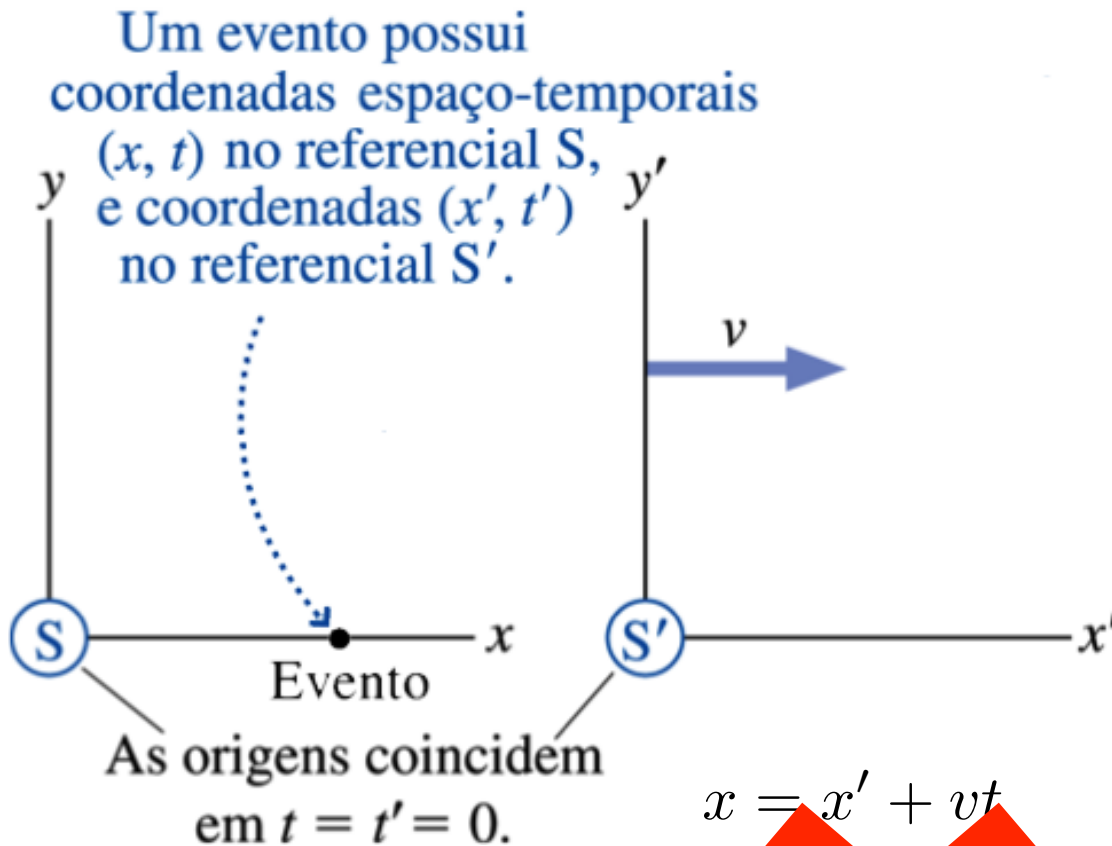
Isaac Newton
1643/1727



James Maxwell
1831/1879



TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU



Considera-se aqui que $t=t'$

$$x = x' + vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v = u'_x + v$$
$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u'_y$$
$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = u'_z$$



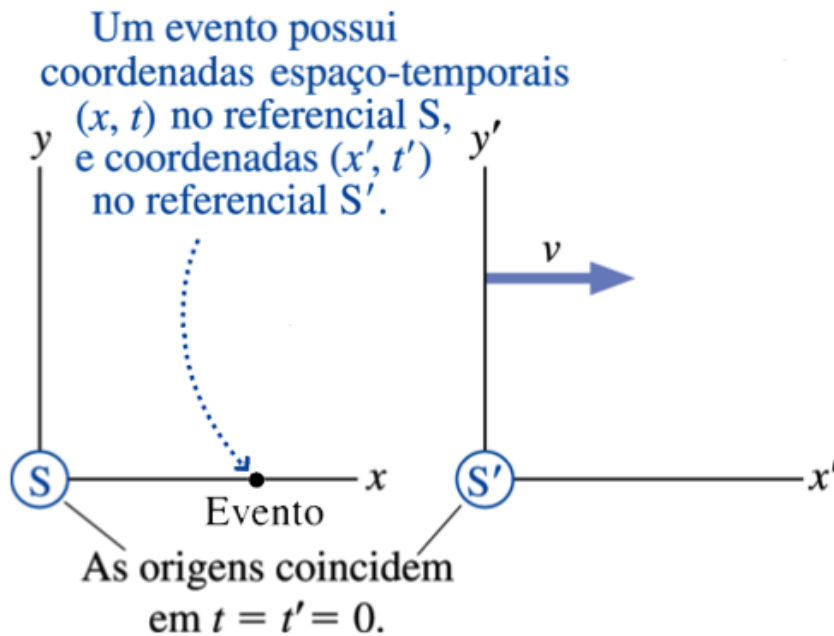
TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

As transformações corretas têm de satisfazer quatro condições:

- 1) Concordar com as transformações de Galileu no limite de baixas velocidades; $v \ll c$
- 2) Transformar não apenas as coordenadas espaciais, mas também a **coordenada temporal**.
- 3) Assegurar que a velocidade da luz seja sempre a mesma, c , **em todos os referenciais**.
- 4) Serem **lineares**:

$$x' = a x + b t \quad \text{e} \quad t' = A x + B t,$$

onde a , b , A e B são constantes que dependem apenas de v

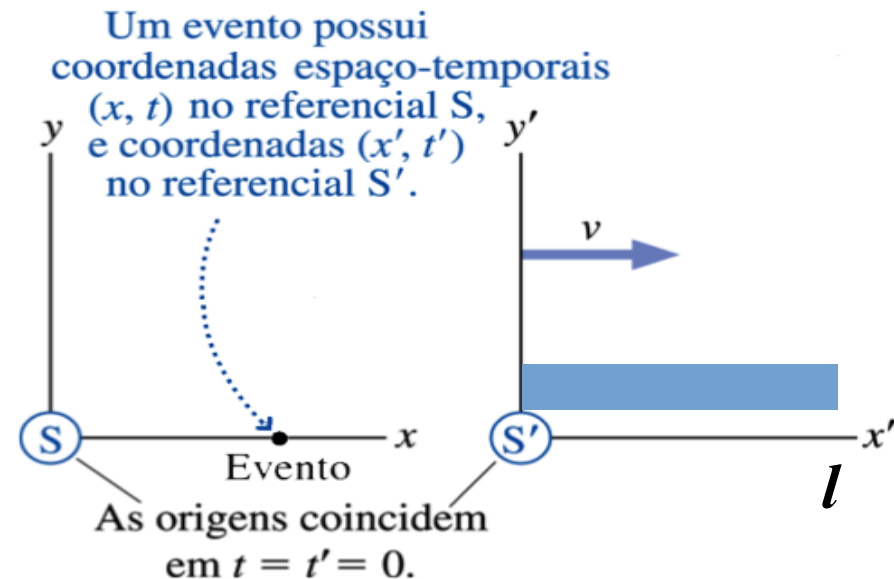


TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

- **Evento 1:** um relógio localizado na origem de S' ($x'_1 = 0$) marca t'_1
- No referencial S , este evento tem coordenadas $(x_1 = vt_1, t_1)$ para algum t_1 . Substituindo na transformação:

$$0 = x'_1 = av t_1 + bt_1 \longrightarrow b = -av \longrightarrow \mathbf{x' = a (x - v t)}$$

Considere agora uma régua de **comprimento próprio** l , que está parada no referencial S' , indo de $x' = 0$ até $x' = l$



TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

- **Evento 2:** a ponta da régua passa por um relógio parado no referencial S na hora em que este também mede t_1 . Substituindo na transformação:

$$\ell = x'_2 = a (x_2 - v t_1)$$

- ✓ Mas sabemos que, pela contração espacial, as distâncias entre os dois eventos nos dois referenciais satisfazem:

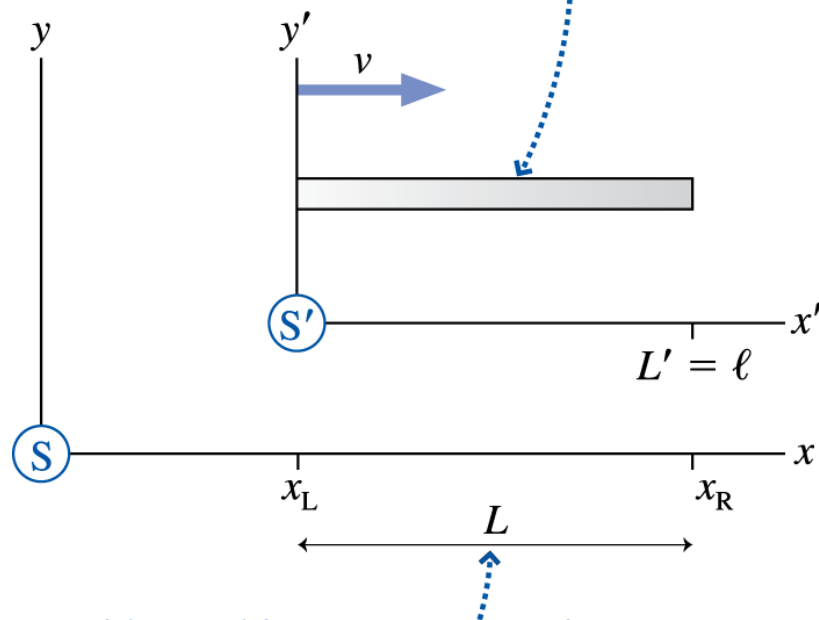
$$x'_2 - x'_1 = \gamma (x_2 - x_1)$$

Distância
contraída

Conclusão: $a = \gamma$ —→

$$x' = \gamma (x - v t)$$

O objeto encontra-se em repouso no referencial S' . Seu comprimento é $L' = \ell$, que pode ser medido a qualquer instante.



Devido ao objeto estar em movimento no referencial S , a fim de que possamos encontrar seu comprimento L no referencial S devemos efetuar medições simultâneas de suas extremidades.



TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

$$x' = \gamma (x - v t)$$

- Usando os mesmos argumentos mas com uma régua parada no referencial S , podemos concluir também que

$$x = \gamma (x' + v t')$$

- Resolvendo para t' em função de x , t :

$$t' = \gamma (t - v x / c^2)$$



TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

As transformações corretas têm de satisfazer quatro condições:

$$x' = \gamma (x - v t)$$

$$t' = \gamma (t - v x / c^2)$$

- 1) Concordar com as transformações de Galileu no limite de baixas velocidades; $v \ll c$ ✓
- 2) Transformar não apenas as coordenadas espaciais, mas também a coordenada temporal. ✓
- 3) Assegurar que a velocidade da luz seja sempre a mesma, c , em todos os referenciais. ✓
- 4) Serem *lineares*: ✓

$$x' = a x + b t \quad \text{e} \quad t' = A x + B t,$$

onde a , b , A e B são constantes que dependem apenas de v



TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

O que ocorre com as distâncias y e z , perpendiculares ao movimento?
Contraem? **Esticam?**

R: nada

de S para S'

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma (t - vx / c^2)$$

de S' para S

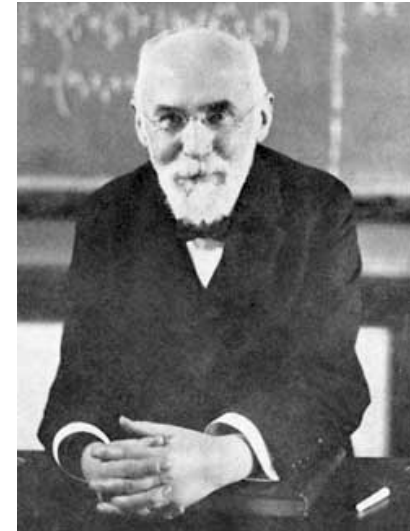
$$x = \gamma (x' + v t')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma (t' + vx' / c^2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$



**Hendrik
Lorentz**

Em 1905 Albert Einstein propôs uma interpretação das Transformadas de Lorentz permitiu manter as equações de Maxwell inalteradas, mas exigiu uma revisão completa dos conceitos de tempo e espaço tão fundamentais na Mecânica Clássica.

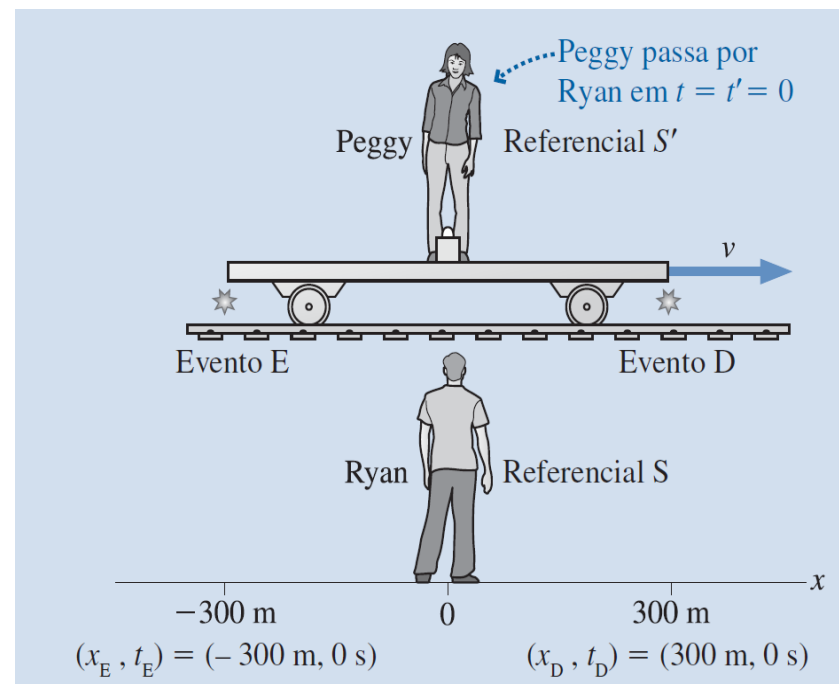


TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

Ex. 37.8: DE VOLTA AO PROBLEMA DA PEGGY. Peggy está parada no centro de um vagão longo e plano com uma bomba fixa em cada extremidade do mesmo. O vagão passa por Ryan, que está parado no solo, com uma velocidade $v = 0,8c$. Ele vê os flashes provenientes da explosão da bomba simultaneamente $1,0 \mu\text{s}$ após Peggy ter passado por ele. Mais tarde, Ryan vê marcas queimadas no trilho a 300 m de ambos os lados do local onde ele estava parado.

a) De acordo com Ryan, qual é a distância entre os locais das duas explosões? Quando elas ocorrem em relação ao instante em que Peggy passa por ele?

b) De acordo com Peggy, qual é a distância entre os locais das duas explosões? Quando elas ocorrem em relação ao instante em que Ryan passa por ela?



Para Ryan em S

- ✓ Evento D explosão a direita
- ✓ Evento E explosão a esquerda
- Instante em que os 2 se cruzam $t=t'=0$
- As duas marcas de queimado – **distância entre as explosões $L=600\text{m}$**
- Portanto, cada explosão ocorreu **$1\mu\text{s}$ antes dele ver os flashes**

$$(x_E, t_E) = (-300\text{m}, 0\mu\text{s}) \quad (x_D, t_D) = (300\text{m}, 0\mu\text{s})$$

Para Peggy em S':

Os eventos não são simultâneos no referencial de Peggy

- ✓ Evento D **ocorre antes** do Evento E
- ✓ Como estes tempos se relacionam com os tempos de Ryan?

$$\textbf{T. Lorentz} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1,667$$

$$x_E' = \gamma(x_E - vt_E) = 1,667(-300\text{m} - 0.8c \cdot 0\mu\text{s}) = -500\text{m} \quad \text{e} \quad x_D' = \gamma(x_D - vt_D) = 500\text{m}$$

$$t_E' = \gamma(t_E - vx_E/c^2) = 1.33\mu\text{s} \quad \text{e} \quad t_D' = \gamma(t_D - vx_D/c^2) = -1.33\mu\text{s}$$

$$(x_E', t_E') = (-500\text{m}, 1.33\mu\text{s}) \quad (x_D', t_D') = (500\text{m}, -1.33\mu\text{s})$$



TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ PARA AS VELOCIDADES

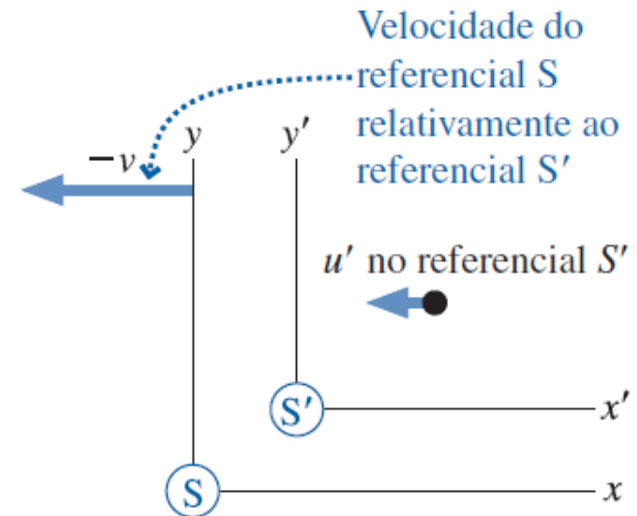
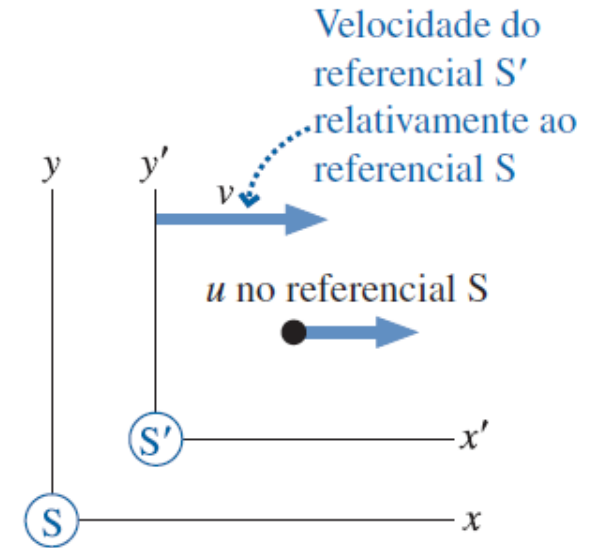
$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d(\gamma(x' + vt'))}{d(\gamma(t' + vx'/c^2))}$$

$$= \frac{dx' + vdt'}{dt' + vdx'/c^2}$$

$$= \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Reciprocamente:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$



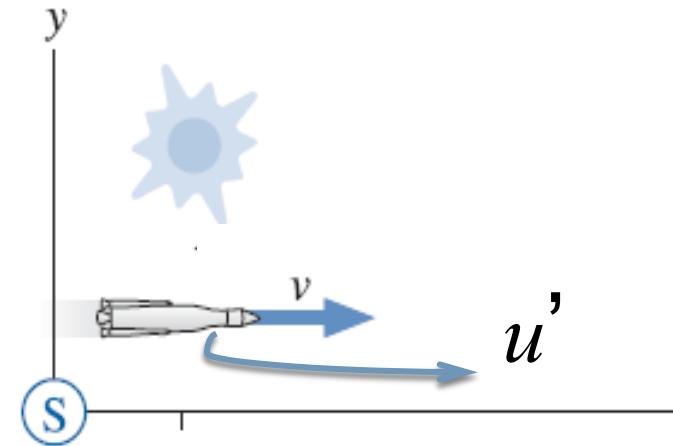
TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Teste: se $u' = v = c$:

$$u = c \quad \checkmark$$

37.10 - Um foguete passa pela Terra com uma velocidade $0,9c$. Ao passar pela Terra, ele lança um projétil para frente com velocidade $0,95c$ em relação ao foguete. Qual é a velocidade do projétil em relação a Terra?



Resposta: $u = 0,997c$

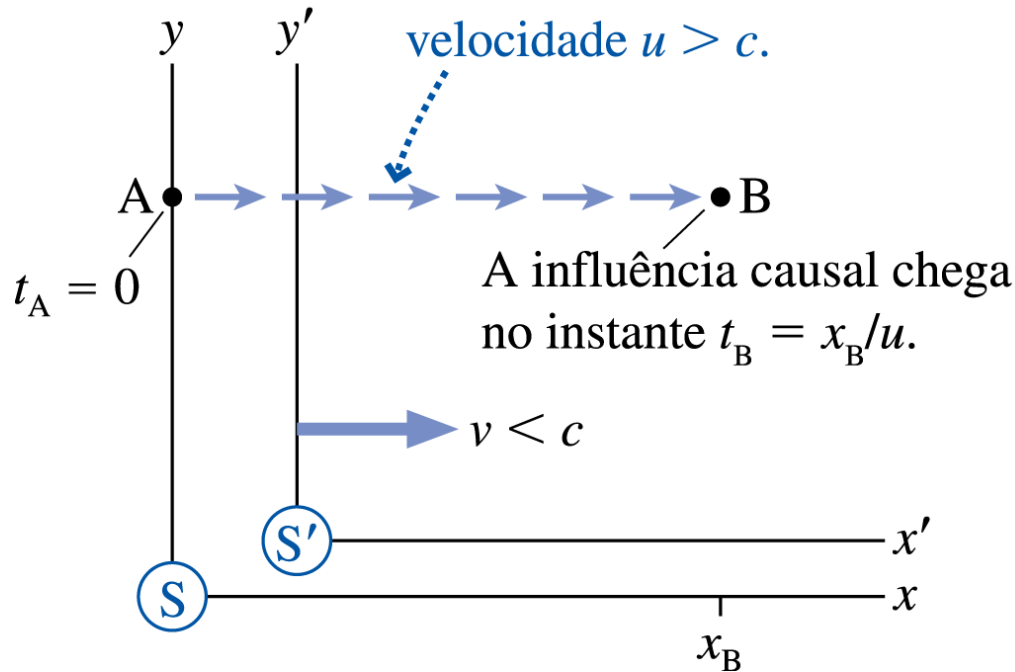
Desafio: prove que se $u' \leq c$ e $v \leq c$ então $u \leq c$



PODE ALGO ANDAR MAIS RAPIDO DO QUE A LUZ ?

Se A causa B , então $t_A < t_B$ deve ser verdade em relação a todos os referenciais

Admite-se que uma influência causal vá de A até B com velocidade $u > c$.



Visto do ref. S' :

$$t'_A = \gamma \left(t_A - \frac{v}{c^2} x_A \right) = 0$$

$$t'_B = \gamma \left(t_B - \frac{v}{c^2} x_B \right) \\ = \gamma t_B \left(1 - \frac{vu}{c^2} \right)$$

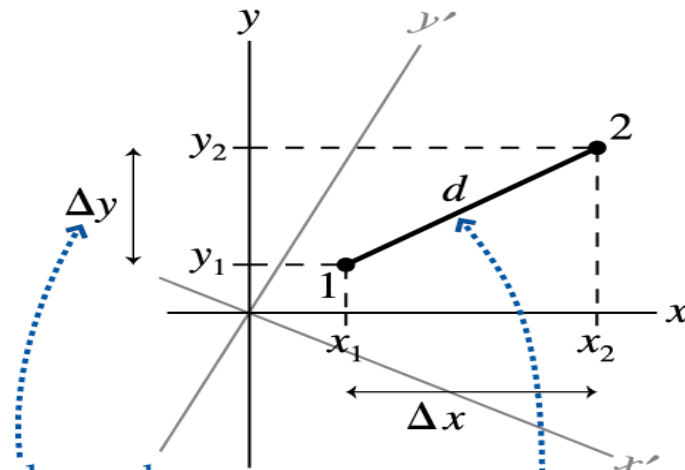
Se $vu/c^2 > 1$: $t'_B < 0$!! evento B ocorreria antes do A

Se algo pudesse andar mais rápido que a luz, alguns observadores veriam **efeitos acontecerem antes das suas causas**, como num filme rodando ao contrário – absurdo!



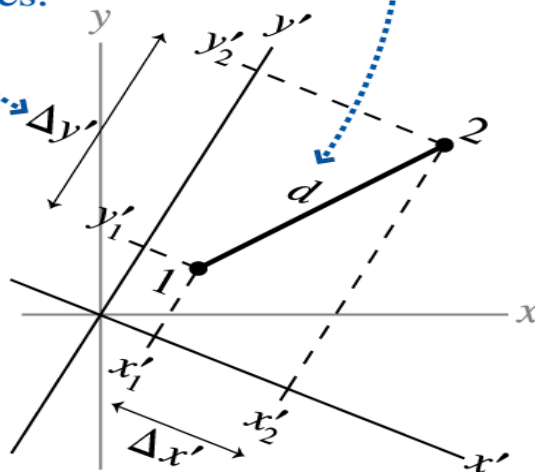
O INTERVALO ENTRE DOS EVENTOS

Medições feitas no sistema xy



Os valores das coordenadas e dos intervalos são diferentes.

A distância d é a mesma.



Medições feitas no sistema $x'y'$

GEOMETRIA USUAL:

a **distância espacial** entre 2 pontos não depende da escolha da orientação dos eixos x e y

$$\begin{aligned} d^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 \end{aligned}$$

O INTERVALO ENTRE DOS EVENTOS

Em relatividade: o *intervalo espaço-temporal* entre dois eventos independe do referencial usado para medir x e t :

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

2 eventos

E1: (x_1, t_1) ou (x'_1, t'_1)

E2: (x_2, t_2) ou (x'_2, t'_2)

$\Delta x = (x_2 - x_1)$; $\Delta t = (t_2 - t_1)$

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 =$$

$$= \gamma^2 [c^2(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)^2 - (\Delta x' + v\Delta t')^2]$$

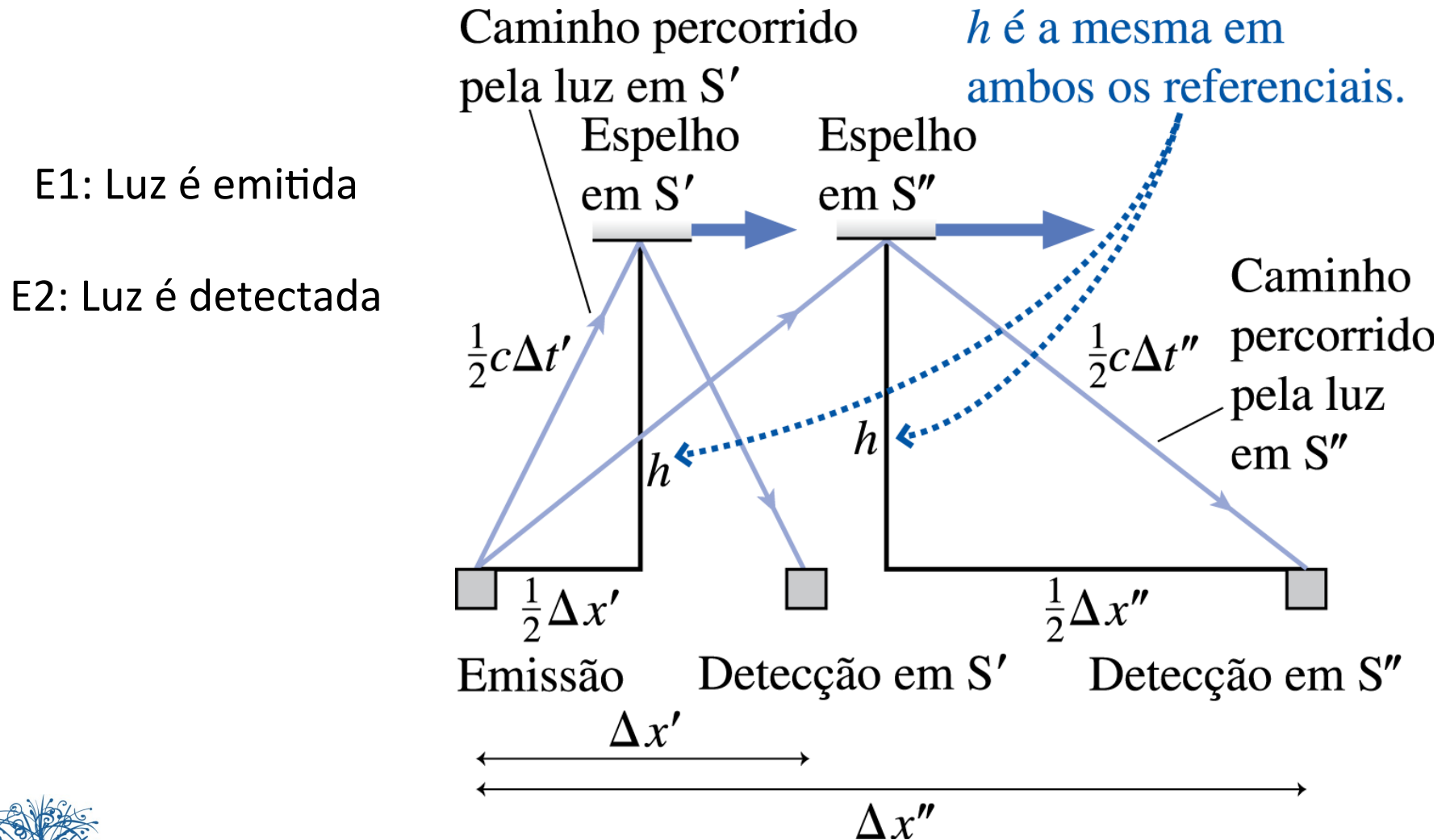
$$= \cancel{\gamma^2} [c^2(\Delta t')^2(1 - v^2/c^2) + (\Delta x')^2(v^2/c^2 - 1) + \cancel{2v\Delta x'\Delta t'} - \cancel{2v\Delta x'\Delta t'}]$$

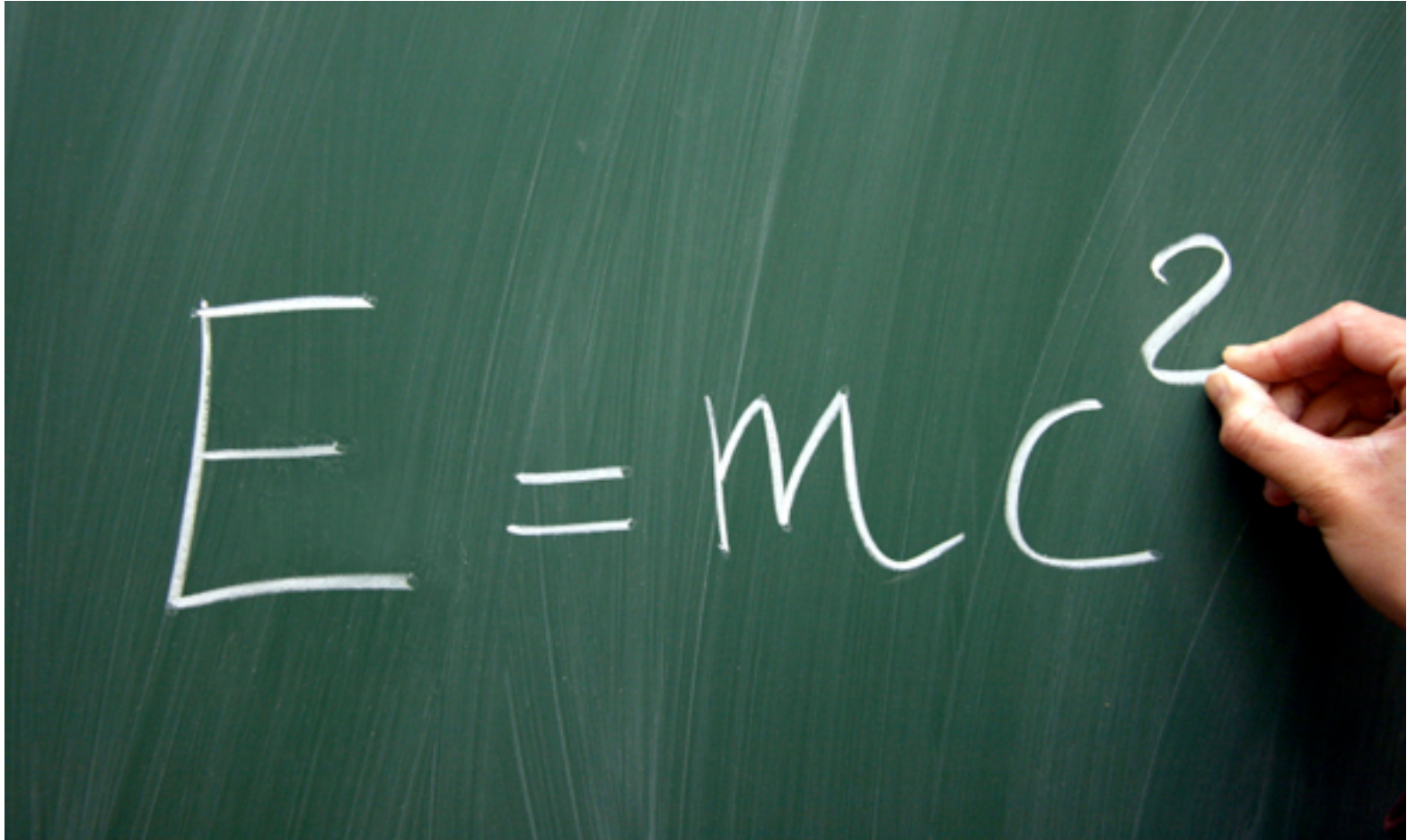
$$= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

O intervalo s não é relativo! INVARIANTE



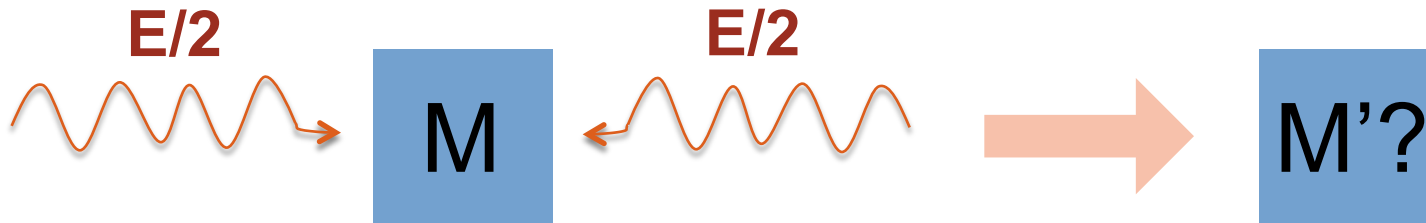
Interpretação Geométrica do Intervalo espaço-temporal s entre 2 eventos



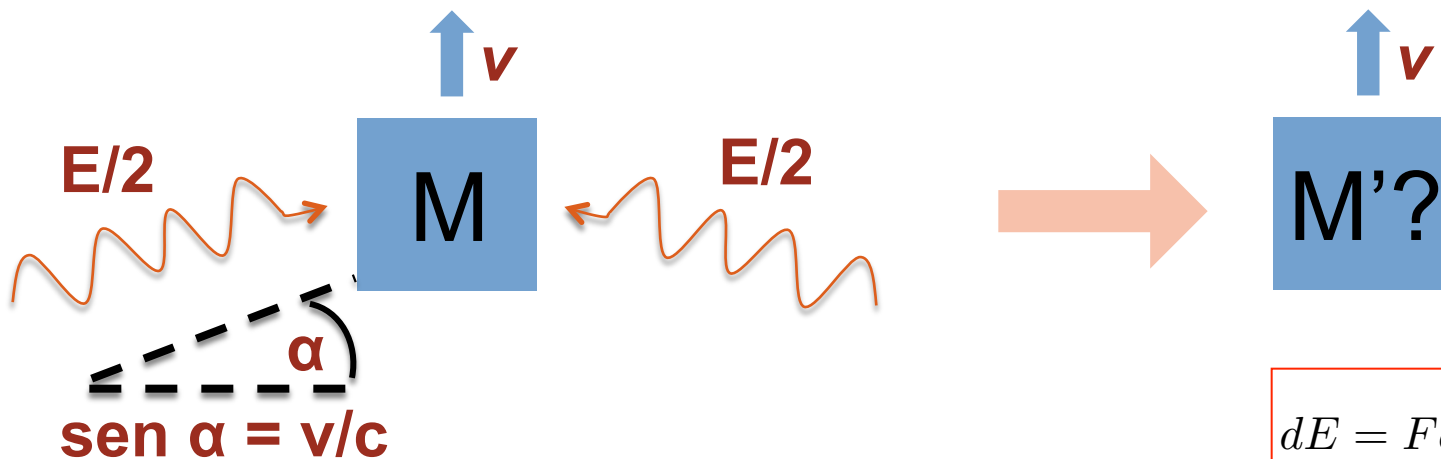
A photograph of a hand writing the equation $E = mc^2$ on a dark green chalkboard. The hand is on the right side, holding a piece of white chalk and finishing the superscript '2' on the 'c'. The equation is written in white chalk on a dark green background.
$$E = mc^2$$



MOTIVAÇÃO DE $E = mc^2$



Em um referencial se movendo para baixo com velocidade $v \ll c$



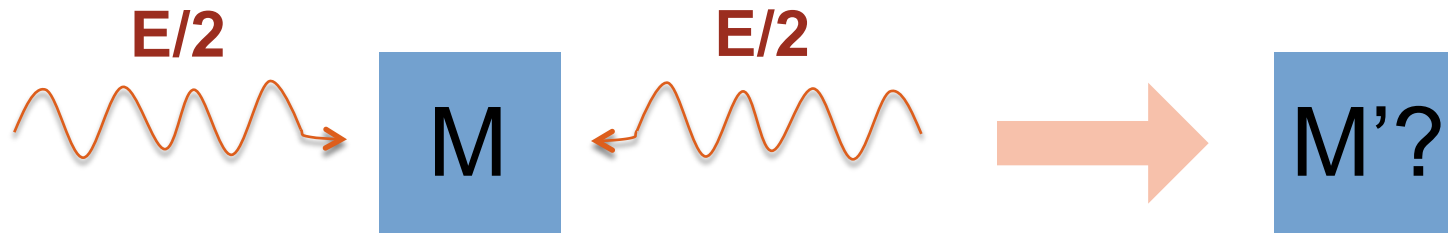
Conservação do momento na dir. y:

$$M'v = Mv + 2 (\text{mom. y da luz})!$$

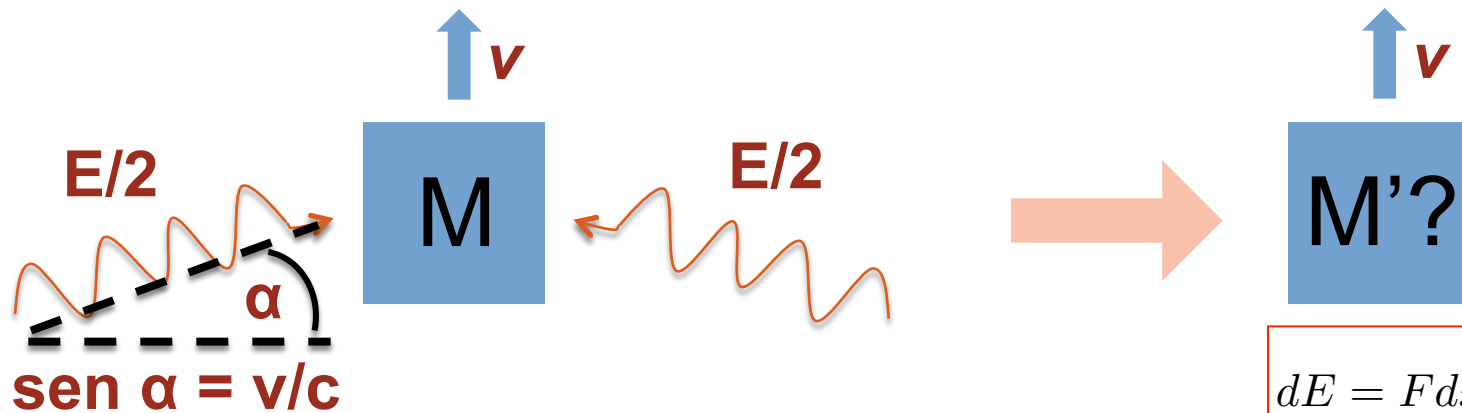
$$\begin{aligned} dE &= F dx = \frac{dp}{dt} dx \\ &= \frac{dx}{dt} dp \\ &= u dp \end{aligned}$$



MOTIVAÇÃO DE $E = mc^2$



Em um referencial se movendo para baixo com velocidade $v \ll c$

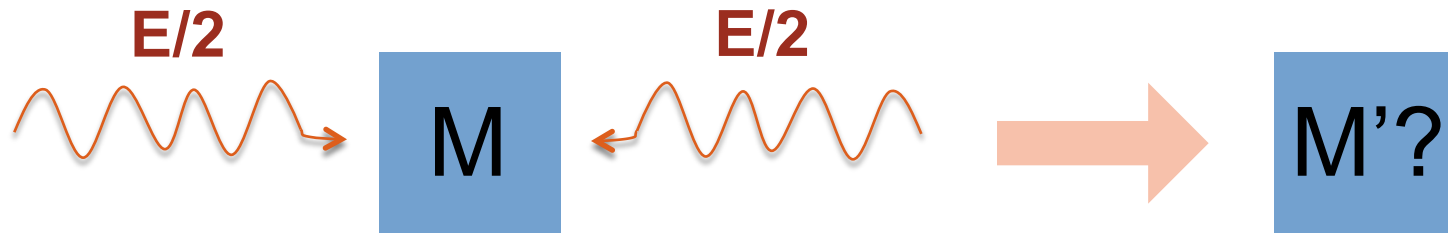


Cons. momento na dir. y : $M'v = Mv + 2 \left((E/2c) \sin \alpha \right)$

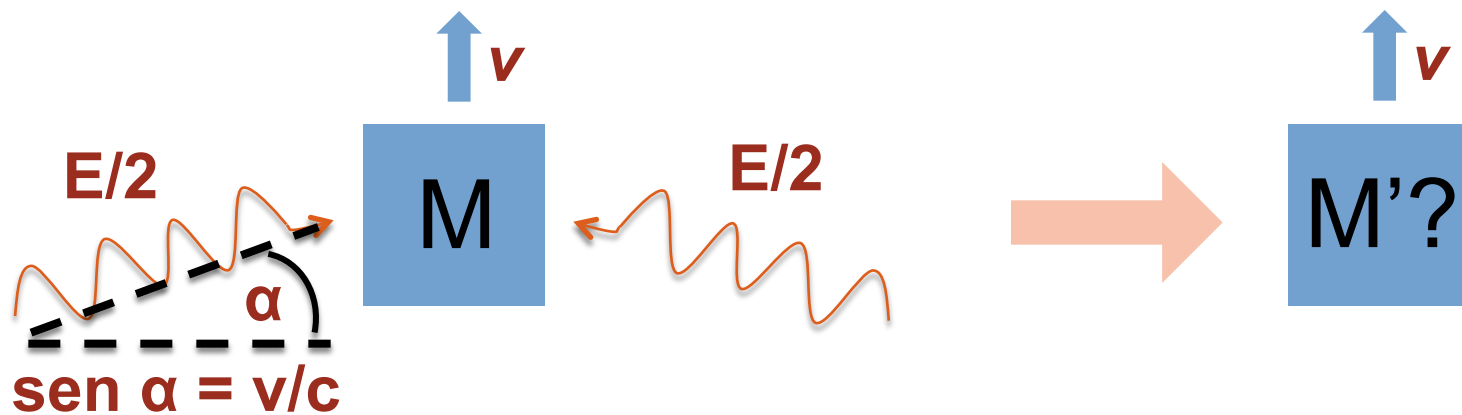
$$\begin{aligned} dE &= F dx = \frac{dp}{dt} dx \\ &= \frac{dx}{dt} dp \\ &= u dp \end{aligned}$$



MOTIVAÇÃO DE $E = mc^2$



Em um referencial se movendo para baixo com velocidade $v \ll c$



Cons. momento na dir. y : $M'v = Mv + E v / c^2$

$$E = (M' - M)c^2 !$$



EXPLORANDO $E_0=mc^2$

Fissão Nuclear do ^{235}U (^{238}U 99.2% e ^{235}U 0.7 %)



$$1 \text{ u} = 1/12 \text{ (Massa do } {}^{12}\text{C)} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ Kg.}$$

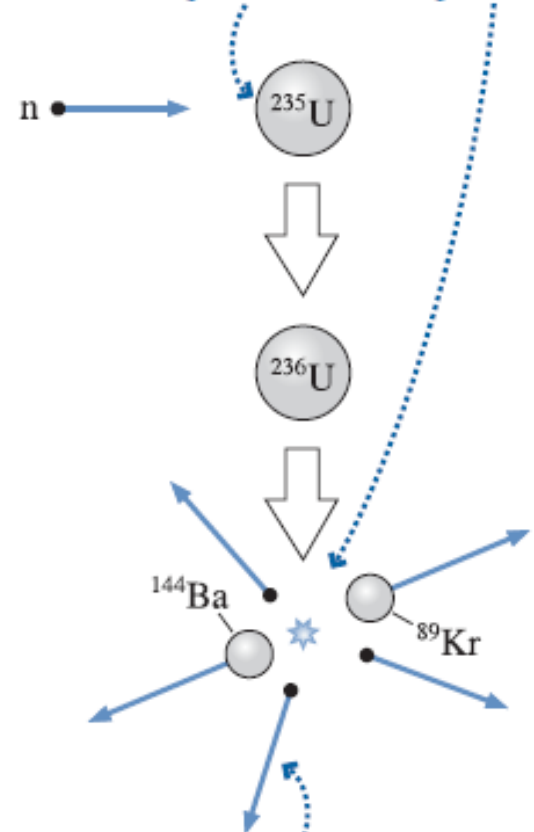
A massa dos produtos somada é 0,185u menor do que a massa dos reagentes.

$$M_{\text{antes}} - M_{\text{depois}} = 0,185 \text{ u} = 3.07 \times 10^{-28} \text{ Kg}$$

$$\Delta K = E_0 = m_{\text{perdida}} c^2 = 2.8 \times 10^{-11} \text{ J para um átomo}$$

$$N = 6.02 \times 10^{23} \text{ átomos}$$

A massa dos reagentes é 0,185 u maior do que a massa dos produtos.



A massa de 0,185 u foi convertida em energia.

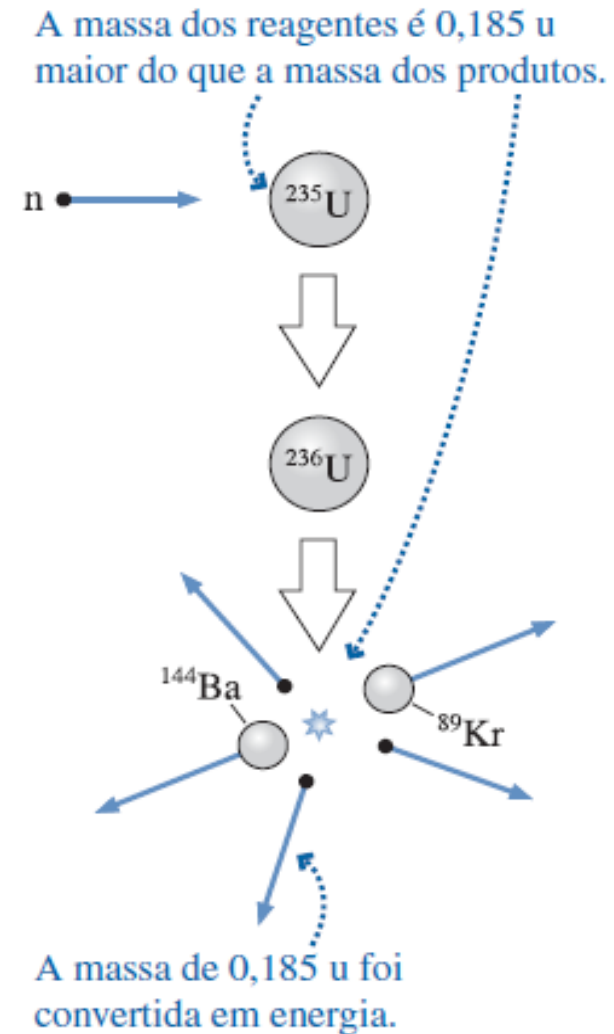


EXPLORANDO $E_0=mc^2$

Fissão Nuclear do ^{235}U (^{238}U 99.2% e ^{235}U 0.7 %)

Exercício: Uma usina nuclear gera energia térmica (calor) com uma potência de 3 GW. 1 GW dessa energia é convertida em energia elétrica (eficiência 33 %). Quantos átomos de U são fissionados no ano?

$$E_0 = mc^2 = 2.8 \times 10^{-11} \text{ J para um átomo}$$
$$N = 6.02 \times 10^{23} \text{ átomos}$$



ENERGIA E MOMENTO LINEAR NEWTONIANOS

Relembrando: Na mecânica de Newton existem

Leis de conservação

Conservação do Momento Linear: num sistema isolado de forças externas,

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$$

onde o vetor $\mathbf{P} = \sum_j m_j \mathbf{u}_j$ é o **momento linear total** das partículas do sistema

Conservação da Energia: num sistema submetido a forças conservativas

$$E_i = E_f$$

onde $E = \boxed{\sum_j \frac{1}{2} m_j u_j^2} + \boxed{V(x_1, \dots, x_n, t)}$ é a **energia total** das partículas do sistema

energia cinética

energia potencial



ENERGIA E MOMENTO LINEAR NEWTONIANOS

✓ Essas leis são *invariantes por transformações de Galileu*:

Se $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$ vale em um referencial inercial S , então em um referencial S' se movendo com velocidade $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_i' &= \sum_j m_j \mathbf{u}_j^{i'} = \sum_j m_j (\mathbf{u}_j^i - \mathbf{v}) = \sum_j m_j \mathbf{u}_j^i - (\sum_j m_j) \mathbf{v} \\ &= \mathbf{P}_i - M\mathbf{v} = \mathbf{P}_f - M\mathbf{v} = \mathbf{P}_f'\end{aligned}$$

Da mesma forma, se $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_f$ e $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$ valem em S , então em S'

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i' &= \sum_j \frac{1}{2} m_j (\mathbf{u}_j^{i'})^2 + V(x'_1 + vt, \dots, x'_n + vt) = \sum_j \frac{1}{2} m_j (\mathbf{u}_j^i - \mathbf{v})^2 + V(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_j \frac{1}{2} m_j (\mathbf{u}_j^i)^2 - (\sum_j m_j \mathbf{u}_j^i) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} Mv^2 + V(x_1, \dots, x_n) \\ &= E_i - \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} Mv^2 = E_f - \mathbf{P}_f \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} Mv^2 = \mathbf{E}_f'\end{aligned}$$



ENERGIA E MOMENTO LINEAR NEWTONIANOS

Porém o momento e energia Newtonianos

não são invariantes por transformações de Lorentz:

Ex: Se $\sum_j m_j u_j^i = \sum_j m_j u_j^f$ vale em um referencial inercial S , então em um referencial S' se movendo com velocidade ***relativística*** v :

$$\sum_j m_j u_j^{i'} = \sum_j m_j \left(\frac{u_j^i - v}{\sqrt{1 - u_j^i v / c^2}} \right) \neq \sum_j m_j u_j^{f'}$$

??? P: Será que momento e energia não se conservam mais ???

R: SIM, mas não terão a mesma forma Newtoniana



ENERGIA E MOMENTO RELATIVISTICOS

Adivinhando a forma relativística para o **Momento** de uma partícula:

$$P_{Newtoniano} = mu = m \frac{dx}{dt}$$

Um ‘chute’ razoável é usar o tempo medido em relação a partícula, que é o **tempo próprio** Dt , pois a partícula está em repouso em relação ao seu próprio referencial

$$P_{Relativistico} = m \frac{dx}{d\tau} = m \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_p P_{Newtoniano}$$

$$\text{onde } \gamma_p = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Obs 1: $\gamma_p \neq \gamma$! (u é a velocidade **da partícula**, e não do referencial S')

Obs 2: quando $u \ll c$, $P_{Relativistico} \longrightarrow P_{Newtoniano}$



EXEMPLO: MOMENTO linear RELATIVISTICO

37.11 – Em um acelerador de partículas, elétrons atingem uma velocidade de $0,999c$ relativamente ao laboratório. A colisão de um elétron com um alvo produz um múon que se move para a frente com uma velocidade igual a $0,95c$ em relação ao laboratório. A massa do múon vale $1,90 \times 10^{-28}$ kg.

- a) Qual é o momento do múon em relação ao referencial do laboratório?
- b) E em relação ao referencial do feixe de elétrons?

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma_p mu$$

RESPOSTAS:

a): $\gamma_p = 3,20$, $p = 1,73 \times 10^{-19}$ kg m/s

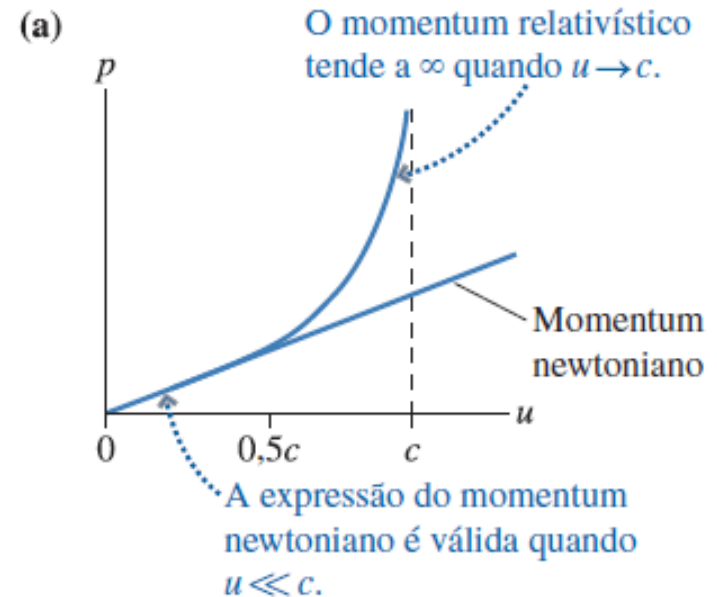
b): $\gamma'_p = 3,66$, $p = -2,01 \times 10^{-19}$ kg m/s



Novamente, por que não se pode andar mais rápido que a luz

$$P_{\text{Newtoniano}} = mu = m \frac{dx}{dt}$$

$$P_{\text{Relativístico}} = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_p mu$$



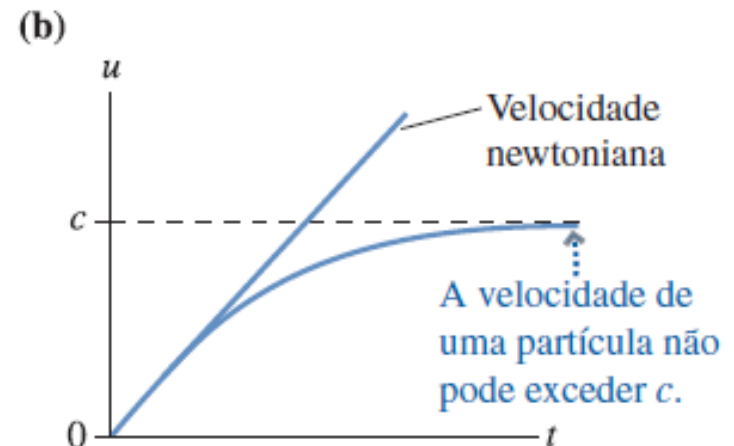
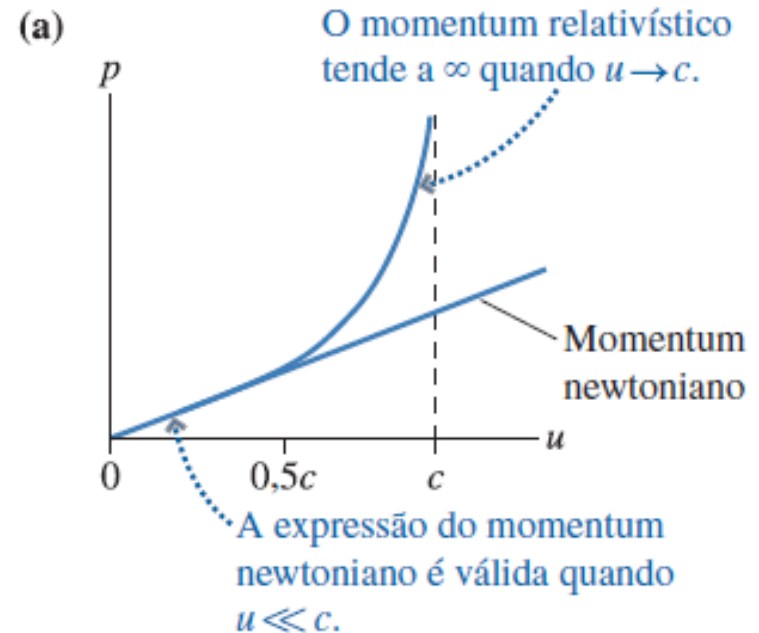
Novamente, por que não se pode andar mais rápido que a luz?

$$P_{\text{Newtoniano}} = mu = m \frac{dx}{dt}$$

$$P_{\text{Relativistico}} = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_p mu$$

Força constante ($F = dp/dt = \text{cte}$)
não produz aceleração constante !!

$F \neq ma$!



ENERGIA E MOMENTO LINEAR RELATIVISTICOS

Forma relativística para a **Energia** de uma partícula livre

$$E_{Newtoniano} = \frac{1}{2}mu^2$$

$$E_{Relativistico} = \gamma_p mc^2$$

Justificativa 1: para $u \ll c$

$$E_{Relativistico} \simeq mc^2 \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} \right) = mc^2 + E_{Newtoniano}$$

Energia de repouso $\equiv E_0$
(existe mesmo qdo $u = 0$)



ENERGIA E MOMENTO LINEAR RELATIVISTICOS

Forma relativística para a **Energia** de uma partícula livre

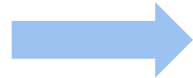
$$E_{Newtoniano} = \frac{1}{2}mu^2$$

$$E_{Relativistico} = \gamma_p mc^2$$

Justificativa 2: considere 1 partícula se movendo de (x, t) para $(x + dx, t + dt)$ em um ref. S . Vamos transformar as expressões P_{relat} e E_{relat} acima para um ref. S' :

$$\frac{mc}{d\tau} dx' = \frac{mc}{d\tau} \gamma (dx - v dt)$$

$$\frac{mc^2}{d\tau} dt' = \frac{mc^2}{d\tau} \gamma (dt - v dx/c^2)$$



$$P'_{relat} = \gamma (P_{relat} - vE_{relat}/c^2)$$

$$E'_{relat} = \gamma (E_{relat} - vP_{relat})$$

Transformações de Lorentz
para momento e energia



ENERGIA E MOMENTO LINEAR RELATIVISTICOS

Forma relativística para a **Energia** de uma partícula livre

$$E_{Newtoniano} = \frac{1}{2}mu^2$$

$$E_{Relativistico} = \gamma_p mc^2$$

Justificativa 2: considere 1 partícula se movendo de (x, t) para $(x + dx, t + dt)$ em um ref. S. Vamos transformar as expressões P_{relat} e E_{relat} acima para um ref. S' :

Para um sistema de n partículas, essas transformações continuam valendo para cada partícula, e também para o momento e energia **totais** do sistema

$$P'_{relat} = \gamma (P_{relat} - vE_{relat}/c^2)$$

$$E'_{relat} = \gamma (E_{relat} - vP_{relat})$$



ENERGIA E MOMENTO LINEAR RELATIVISTICOS

Conclusão: se, num dado referencial S observarmos que um sistema satisfaz

$$P_{relat}^i = P_{relat}^f \quad \text{e} \quad E_{relat}^i = E_{relat}^f$$

➤ então um observador no ref. S' também observará que

$$P'^i_{relat} = P'^f_{relat} \quad \text{e} \quad E'^i_{relat} = E'^f_{relat}$$

Para um sistema de n partículas, essas transformações continuam valendo para cada partícula, e também para o momento e energia **totais** do sistema

$$P'_{relat} = \gamma (P_{relat} - vE_{relat}/c^2)$$

$$E'_{relat} = \gamma (E_{relat} - vP_{relat})$$

Transformações de Lorentz
para momento e energia

ENERGIA E MOMENTO LINEAR RELATIVISTICOS

Conclusão: se, num dado referencial S observarmos que um sistema satisfaz

$$P_{relat}^i = P_{relat}^f \quad \text{e} \quad E_{relat}^i = E_{relat}^f$$

➤ então um observador no ref. S' também observará que

$$P'^i_{relat} = P'^f_{relat} \quad \text{e} \quad E'^i_{relat} = E'^f_{relat}$$

Com essas definições de P e E , a conservação de momento e energia torna-se uma propriedade física que **independe da escolha do referencial inercial**, obedecendo assim ao Princípio da Relatividade



ENERGIA E MOMENTO LINEAR RELATIVISTICOS

Relação ligando momento e energia para uma partícula

$$P_{Relat} = \gamma_p m u \qquad E_{Relat} = \gamma_p m c^2$$

Invariante em qq
ref. inercial

Em particular, no
ref. que acompanha
a partícula: $s = c d\tau$

$$\frac{m^2 c^2}{(d\tau)^2} s^2 = \frac{m^2 c^2}{(d\tau)^2} c^2 (dt)^2 - \frac{m^2 c^2}{(d\tau)^2} (dx)^2$$

$$m^2 c^4 = E_{relat}^2 - P_{relat}^2 c^2$$

$$E_{relat} = \sqrt{m^2 c^4 + P_{relat}^2 c^2}$$

Vale em qualquer referencial inercial



ENERGIA E MOMENTO LINEAR RELATIVISTICOS

Prova da invariância da conservação do momentum relativístico

Partículas com vel. u_j no ref S

no ref. S $p = \sum_j \frac{m_j u_j}{\sqrt{1 - u_j^2/c^2}} \equiv \sum_j \gamma_j m_j u_j$ onde m_j é a massa de repouso da partícula j .
e $\gamma_j = \frac{1}{\sqrt{1 - u_j^2/c^2}}$

no ref. S' , a vel. é $u'_j = \frac{u_j - v}{1 - \frac{u_j v}{c^2}}$

$$\text{então } p' = \sum_j \frac{m_j u'_j}{\sqrt{1 - \frac{u_j'^2}{c^2}}} = c^2 \sum_j \frac{m_j [u_j - v]}{c^2 - u_j v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_j'^2}{c^2}}}$$



ENERGIA E MOMENTO LINEAR RELATIVISTICOS

então
$$p' = \sum_j \frac{m_j u'_j}{\sqrt{1 - \frac{u_j'^2}{c^2}}} = c^2 \sum_j \frac{m_j [u_j - v]}{c^2 - u_j v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_j^2}{c^2}}}$$

como:

$$\gamma_j' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_j'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(u_j - v)^2}{c^2}}} = \frac{c^2 - u_j v}{\sqrt{(c^2 - u_j v)^2 - c^2 (u_j - v)^2}} = \frac{c^2 - u_j v}{\sqrt{(c^2 - u_j^2)(c^2 - v^2)}}$$

então:
$$p' = c^2 \sum_j \frac{m_j [u_j - v]}{c^2 - u_j v} \cdot \frac{c^2 - u_j v}{\sqrt{(c^2 - u_j^2)(c^2 - v^2)}} = \gamma \sum_j \gamma_j m_j [u_j - v]$$

$$p' = \gamma \left(p - \left(\sum_j \gamma_j m_j \right) v \right) = \gamma \left(p - \frac{E v}{c^2} \right)$$

Da mesma forma:

$$E' = \sum_j \gamma_j' m_j c^2 = \gamma \sum_j \gamma_j m_j (c^2 - u_j v) = \gamma [E - p v]$$



ENERGIA E MOMENTO LINEAR RELATIVISTICOS

$\therefore$ Se, após evolução temporal, o sistema de partículas satisfizer $\begin{cases} p_i = p_f \\ E_i = E_f \end{cases}$ no ref. S, então no ref. S' temos

$$p'_i = \gamma \left[p_i - \frac{E_i v}{c^2} \right] = \gamma \left[p_f - \frac{E_f v}{c^2} \right] = p'_f !$$

$$\text{e } E'_i = \gamma [E_i - p_i v] = \gamma [E_f - p_f v] = E'_f !$$

Com essa redefinição de p e E , a conservação de momento e energia é invariante pelas Trans. de Lorentz!

